

بررسی ریشه‌ی n -ام اعداد حقیقی مثبت

ابراهیم اکبر بگلو

دانشگاه فرهنگیان تبریز

۲۴ اسفند ۱۳۹۸



قضیه

اگر a یک عدد حقیقی مثبت و $n \in \mathbb{N}$ باشد، عدد مثبت و منحصر بفرد b وجود دارد بگونه‌ای که $b^n = a$.



اثبات

لم

ابتدا ثابت میکنیم

$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$



$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$



$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$(x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x - 1)x^k$$



$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$(x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x - 1)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - x^k$$



$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$(x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x - 1)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$



$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$(x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x - 1)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$= \sum_{k=1}^n x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$



دانشگاه گجرات

$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$(x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (x - 1)x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$= \sum_{k=1}^n x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$= x^n - 1$$



سازمان اسناد و کتابخانه ملی

حال اگر $x = \frac{a}{b}$ باشد، داریم:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^k$$



حال اگر $x = \frac{a}{b}$ باشد، داریم:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$\frac{a^n - b^n}{b^n} = \frac{a - b}{b} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^k}$$



حال اگر $x = \frac{a}{b}$ باشد، داریم:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

$$\frac{a^n - b^n}{b^n} = \frac{a - b}{b} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{b^k}$$

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$



ادامه‌ی اثبات

مجموعه‌ی X را بصورت زیر تعریف کنید:



ادامه‌ی اثبات

مجموعه‌ی X را بصورت زیر تعریف کنید:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ و } x^n < a\}$$



ادامه‌ی اثبات

مجموعه‌ی X را بصورت زیر تعریف کنید:

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ و } x^n < a\}$$

ثابت میکنیم X غیرتهی بوده و دارای کران بالایی است



ناتهی بودن X

ادعا میکنیم

$$x_0 = \frac{a}{a+1} \in X$$



ناتهی بودن X

ادعا میکنیم

$$x_0 = \frac{a}{a+1} \in X$$

$$\begin{cases} \circ < a \\ \circ < 1 \end{cases}$$



ناتهی بودن X

ادعا میکنیم

$$x_0 = \frac{a}{a+1} \in X$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < a < a+1$$



ناتهی بودن X

ادعا میکنیم

$$x_0 = \frac{a}{a+1} \in X$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < a < a+1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{a+1} < 1.$$



ناتهی بودن X

ادعا میکنیم

$$x_0 = \frac{a}{a+1} \in X$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < a < a+1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{a+1} < 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right\}$$



ناتهی بودن X

ادعا میکنیم

$$x_0 = \frac{a}{a+1} \in X$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < a < a+1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{a+1} < 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < 1 < a+1$$



ناتهی بودن X

ادعا میکنیم

$$x_0 = \frac{a}{a+1} \in X$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < a < a+1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{a+1} < 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < 1 < a+1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a+1} < 1$$



ناتهی بودن X

ادعا میکنیم

$$x_0 = \frac{a}{a+1} \in X$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right. \Rightarrow 0 < a < a+1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{a+1} < 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1 < a+1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a+1} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{a+1} < a.$$



ناتهی بودن X

ادعا میکنیم

$$x_0 = \frac{a}{a+1} \in X$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right. \Rightarrow 0 < a < a+1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{a+1} < 1.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < 1 \end{array} \right. \Rightarrow 0 < 1 < a+1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a+1} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{a+1} < a.$$

نتیجه

$$\left(\frac{a}{a+1}\right)^n = \left(\frac{a}{a+1}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{a}{a+1}\right) < (1)^{n-1} \left(\frac{a}{a+1}\right) = \frac{a}{a+1} < a.$$

در نتیجه $(x_0)^n < a$ بوده و $x_0 \in X$.

کران بالا داشتن X

ادعا میکنیم

$$\forall x \in X (x < a + 1)$$



کران بالا داشتن X

ادعا میکنیم

$$\forall x \in X (x < a + 1)$$

اگر اینگونه نباشد (فرض خلف)



کران بالا داشتن X

ادعا میکنیم

$$\forall x \in X (x < a + \epsilon)$$

اگر اینگونه نباشد (فرض خلف)

$$x \geq a + \epsilon > 0$$



کران بالا داشتن X

ادعا میکنیم

$$\forall x \in X (x < a + \epsilon)$$

اگر اینگونه نباشد (فرض خلف)

$$x \geq a + \epsilon > 0 \Rightarrow x^n \geq (a + \epsilon)^n$$



کران بالا داشتن X

ادعا میکنیم

$$\forall x \in X (x < a + 1)$$

اگر اینگونه نباشد (فرض خلف)

$$x \geq a + 1 > 0 \Rightarrow x^n \geq (a + 1)^n = (a + 1)^{n-1}(a + 1)$$



کران بالا داشتن X

ادعا میکنیم

$$\forall x \in X (x < a + 1)$$

اگر اینگونه نباشد (فرض خلف)

$$x \geq a + 1 > 0 \Rightarrow x^n \geq (a + 1)^n = (a + 1)^{n-1}(a + 1) > (1)^{n-1}(a + 1)$$



کران بالا داشتن X

ادعا میکنیم

$$\forall x \in X (x < a + 1)$$

اگر اینگونه نباشد (فرض خلف)

$$x \geq a + 1 > 0 \Rightarrow x^n \geq (a + 1)^n = (a + 1)^{n-1}(a + 1) > (1)^{n-1}(a + 1) > a.$$



کران بالا داشتن X

ادعا میکنیم

$$\forall x \in X (x < a + 1)$$

اگر اینگونه نباشد (فرض خلف)

$$x \geq a + 1 > 0 \Rightarrow x^n \geq (a + 1)^n = (a + 1)^{n-1}(a + 1) > (1)^{n-1}(a + 1) > a.$$

که $a + 1 > a$ تناقض است.

پس $a + 1$ یک کران بالا برای مجموعه‌ی X است.



اصل موضوع تمامیت

هر زیر مجموعه‌ی غیر تهی و از بالا کراندار $\mathbb{R}$ ، دارای کوچکترین کران بالایی است.



اصل موضوع تمامیت

هر زیر مجموعه‌ی غیر تهی و از بالا کراندار $\mathbb{R}$ ، دارای کوچکترین کران بالایی است.

در نتیجه طبق اصل تمامیت، X دارای کوچکترین کران بالا است. فرض میکنیم $b = \sup X$.



ادعا می کنیم $b^n = a$.



ادعا می‌کنیم $b^n = a$.
چرا که اگر اینگونه نباشد، طبق اصل تثلیث تنها یکی از دو حالت زیر ممکن خواهد بود:

$$b^n < a \quad \text{یا} \quad a < b^n.$$



ادعا می‌کنیم $b^n = a$.
چرا که اگر اینگونه نباشد، طبق اصل تثلیث تنها یکی از دو حالت زیر ممکن خواهد بود:

$$b^n < a \quad , \quad a < b^n.$$

ثابت می‌کنیم هیچ یک از این دو حالت ممکن نیست.

اصل موضوع تثلیث

بازای هر x و y در $\mathbb{R}$ ، تنها یکی از حالات زیر ممکن است

$$x < y \quad , \quad x = y \quad , \quad y < x.$$



ثابت می‌کنیم حالت $b^n < a$ برقرار نیست.



ثابت می‌کنیم حالت $b^n < a$ برقرار نیست.
◦ $h > 0$ را در نظر بگیرید.



ثابت می‌کنیم حالت $b^n < a$ برقرار نیست.
◦ $h > 0$ را در نظر بگیرید. داریم

$$(b + h)^n - b^n =$$



ثابت می‌کنیم حالت $b^n < a$ برقرار نیست.
◦ $h > 0$ را در نظر بگیرید. داریم

$$(b+h)^n - b^n = ((b+h) - b) \left((b+h)^{n-1} + (b+h)^{n-2}b + \dots + b^{n-1} \right)$$



ثابت می‌کنیم حالت $b^n < a$ برقرار نیست.
◦ $h > 0$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}(b+h)^n - b^n &= ((b+h) - b) \left((b+h)^{n-1} + (b+h)^{n-2}b + \dots + b^{n-1} \right) \\ &= h \left((b+h)^{n-1} + (b+h)^{n-2}b + \dots + (b+h)b^{n-2} + b^{n-1} \right)\end{aligned}$$



ثابت می‌کنیم حالت $b^n < a$ برقرار نیست.
◦ $h > 0$ را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}(b+h)^n - b^n &= ((b+h) - b) ((b+h)^{n-1} + (b+h)^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \\ &= h ((b+h)^{n-1} + (b+h)^{n-2}b + \dots + (b+h)b^{n-2} + b^{n-1})\end{aligned}$$

از طرفی $h < 0$ بوده و $b < b+h$. در نتیجه

$$(b+h)^n - b^n < h(n(b+h)^{n-1})$$



در ابتدا $h < 1$ میگیریم:

$$(b+h)^n - b^n < h(n(b+1)^{n-1})$$



در ابتدا $h < 1$ میگیریم:

$$(b+h)^n - b^n < h(n(b+1)^{n-1})$$

$$h < \frac{a - b^n}{n(b+1)^{n-1}}. \text{ سپس}$$



در ابتدا $h < 1$ میگیریم:

$$(b + h)^n - b^n < h(n(b + 1)^{n-1})$$

سپس $h < \frac{a - b^n}{n(b + 1)^{n-1}}$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$(b + h)^n - b^n < h(n(b + 1)^{n-1}) < \frac{a - b^n}{n(b + 1)^{n-1}} \cdot n(b + 1)^{n-1} < a - b^n$$

یعنی

$$(b + h)^n - b^n < a - b^n \Rightarrow (b + h)^n < a$$



در ابتدا $h < 1$ میگیریم:

$$(b+h)^n - b^n < h(n(b+1)^{n-1})$$

سپس $h < \frac{a - b^n}{n(b+1)^{n-1}}$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$(b+h)^n - b^n < h(n(b+1)^{n-1}) < \frac{a - b^n}{n(b+1)^{n-1}} \cdot n(b+1)^{n-1} < a - b^n$$

یعنی

$$(b+h)^n - b^n < a - b^n \Rightarrow (b+h)^n < a$$

وچنین چیزی ممکن نیست چراکه $b = \sup X$ و $b < b+h$

نکته

در آخر خواهیم داشت:

$$h < \min\left\{1, \frac{a - b^n}{n(b+1)^{n-1}}\right\}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که حالت $a < b^n$ ممکن نیست.



اکنون ثابت می‌کنیم که حالت $a < b^n$ ممکن نیست.

$$b^n - (b - h)^n = (b - (b - h)) (b^{n-1} + b^{n-2}(b - h) + \cdots + (b - h)^{n-1})$$



اکنون ثابت می‌کنیم که حالت $a < b^n$ ممکن نیست.

$$b^n - (b - h)^n = (b - (b - h)) (b^{n-1} + b^{n-2}(b - h) + \dots + (b - h)^{n-1})$$

$$b^n - (b - h)^n < h(n(b)^{n-1})$$

حال با انتخاب $h < \frac{b^n - a}{nb^{n-1}}$ داریم:

$$h(n(b)^{n-1}) < \frac{b^n - a}{nb^{n-1}} \cdot nb^{n-1} = b^n - a$$



اکنون ثابت می‌کنیم که حالت $a < b^n$ ممکن نیست.

$$b^n - (b - h)^n = (b - (b - h)) (b^{n-1} + b^{n-2}(b - h) + \dots + (b - h)^{n-1})$$

$$b^n - (b - h)^n < h(n(b)^{n-1})$$

حال با انتخاب $h < \frac{b^n - a}{nb^{n-1}}$ داریم:

$$h(n(b)^{n-1}) < \frac{b^n - a}{nb^{n-1}} \cdot nb^{n-1} = b^n - a$$

پس

$$b^n - a > b^n - (b - h)^n$$

یعنی

$$(b - h)^n > a$$

که چنین چیزی ممکن نیست.



پس ریشه n -ام وجود دارد. حال ثابت میکنیم که ریشه n -ام منحصر بفرد است.



پس ریشه n -ام وجود دارد. حال ثابت میکنیم که ریشه n -ام منحصر بفرد است.
فرض کنید b_1 و b_2 ریشه‌های n -ام متمایز a باشند. در این صورت طبق اصل تثلیث خواهیم داشت:

$$b_1 < b_2, \quad b_2 < b_1.$$



پس ریشه n -ام وجود دارد. حال ثابت میکنیم که ریشه n -ام منحصر بفرد است.
فرض کنید b_1 و b_2 ریشه‌های n -ام متمایز a باشند. در این صورت طبق اصل تثلیث خواهیم داشت:

$$b_1 < b_2, \quad b_2 < b_1.$$

فرض کنیم $b_2 < b_1$.



پس ریشه n -ام وجود دارد. حال ثابت میکنیم که ریشه n -ام منحصر بفرد است.
فرض کنید b_1 و b_2 ریشه‌های n -ام متمایز a باشند. در این صورت طبق اصل تثلیث خواهیم داشت:

$$b_1 < b_2, \quad b_2 < b_1.$$

فرض کنیم $b_2 < b_1$. در این صورت $b_2^n < b_1^n$



پس ریشه n -ام وجود دارد. حال ثابت میکنیم که ریشه n -ام منحصر بفرد است.
فرض کنید b_1 و b_2 ریشه‌های n -ام متمایز a باشند. در این صورت طبق اصل تثلیث خواهیم داشت:

$$b_1 < b_2, \quad b_2 < b_1.$$

فرض کنیم $b_2 < b_1$. در این صورت $b_2^n < b_1^n$ که چنین چیزی ممکن نیست. چرا که
 $b_2^n = a = b_1^n$.



پس ریشه n -ام وجود دارد. حال ثابت میکنیم که ریشه n -ام منحصر بفرد است.
فرض کنید b_1 و b_2 ریشه‌های n -ام متمایز a باشند. در این صورت طبق اصل تثلیث خواهیم داشت:

$$b_1 < b_2, \quad b_2 < b_1.$$

فرض کنیم $b_2 < b_1$. در این صورت $b_2^n < b_1^n$ که چنین چیزی ممکن نیست. چرا که $b_2^n = a = b_1^n$. و همینطور ثابت میشود که $b_1 < b_2$ ممکن نیست. بنابراین ریشه‌ی n -ام در صورت وجود منحصر بفرد است.

پایان.



دانشگاه گیلان